



Mathématiques générales (MATH2007)

Année académique 2024-2025

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
RÉVISIONS EN VUE DE L'EXAMEN DU 6/01/2025

Les exercices précédés de (*) ne doivent pas être réalisés par les étudiants dispensés.

Exercices divers

1. (*) Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [\pi, 3\pi]$)

$$(a) 3x|x-2| = x-2 \qquad (b) \frac{|1-x|}{x^2-1} \geq x-1$$

$$(c) \cos(3x) - \sin(x) = 0 \qquad (d) \sin(2x) \leq \sin(x)$$

2. (*) Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(-1, 0, a)$, $B(1, 2, -1)$ et $C(4, 1, 2)$ ($a \in \mathbb{R}$). Calculer

(a) $3\vec{AB} \bullet \vec{BC}$
 (b) les composantes de $\vec{AC} \wedge \vec{BC}$
 (c) les composantes de la projection orthogonale de \vec{AC} sur \vec{BC} .

3. (*) Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} .

(a) $x^2 + 2 = -ix$
 (b) $27 + x^3 = 0$

4. (*) Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes :

$$(a) y^2 = x^2 \qquad (b) x^2 = 1 - 9y^2.$$

Représenter le graphique de ces courbes. Comment s'appellent-elles ?
 Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) éventuel(s) ?
 Quelle est leur éventuelle excentricité ?

5. Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes :

(a) $\cos(\ln(e^{-2\pi/3})) + \sin(\text{tg}(3\pi/4))$
 (b) $\arccos(\cos(4\pi/3))$

6. Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} et telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\pi/2)^+, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (\pi/2)^-.$$

Si elles existent et si les données sont suffisantes, déterminer les limites suivantes

$$(a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2x+3)}{|x+1|} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arctg} \left(\frac{x^3-1}{-2x} \right) \qquad (d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-3x)-1}{2x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(-5x-1) - \ln|ex|) \qquad (f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-1}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow -\infty} f \left(\left| \frac{1-x^4}{3+x^2} \right| \right)$$

7. On donne les fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$$(a) \frac{x}{x^2-1} \qquad (b) \cos(\sqrt{1-4x^2}) \qquad (c) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$(d) \text{arctg}(\sin(x^2)) \qquad (e) x \pi^x \qquad (f) x^x$$

$$(g) \ln(|2x+1|+x) \qquad (h) (x-1)|x-1| \qquad (i) \arccos(\sqrt{1-x^2})$$

8. On donne la fonction f définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$. Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et calculer la dérivée première des fonctions

$$g : x \mapsto f(\cos(-x)) \qquad \text{et} \qquad h : x \mapsto f(\sqrt{1-4x^2}).$$

9. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.

(a) $\int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x} dx$

(b) $\int_{-\infty}^0 xe^{3x} dx$

(c) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{2-x} dx$

(d) $\int_{-4}^4 \sqrt{x^2} dx$

(e) $\int_4^5 \frac{2}{x(x^2-6x+9)} dx$

(f) $\int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-4x+4)^2}} dx$

10. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes (f est la fonction inconnue)

a) $D^2 f(x) + f(x) = e^{ix}$ b) $9D^2 f(x) + 6Df(x) + f(x) = x e^{x/3}$

(*) Problèmes élémentaires

1. La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par

(a) $(v/10)^2 + v/2$ si cette voiture est équipée de freins normaux

(b) v si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.

Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

2. Il y a 4 ans, un père avait le quadruple de l'âge de son fils. Dans 10 ans, son âge n'en sera plus que le double. Quels sont actuellement les âges de chacun ?